

Università degli Studi di Catania

Dipartimento di Fisica e Astronomia

e

Dipartimento di Matematica e Informatica

Prova scritta per l'accesso al TFA - classe A049-Matematica e Fisica

05-Ottobre-2012

compito I

Tema interdisciplinare n. 1

Il candidato illustri la nozione di campo conservativo riportando esempi nella meccanica e nell'elettromagnetismo. Successivamente discuta la connessione con le proprietà delle forme differenziali lineari in tre variabili, richiamando i teoremi più importanti. In alternativa, il candidato può iniziare dalle proprietà delle forme differenziali, studiandone poi le applicazioni nell'ambito della meccanica e dell'elettromagnetismo a proposito dei campi conservativi.

Tema interdisciplinare n. 2

Il candidato discuta la teoria delle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine e la loro applicazione nella risoluzione dei problemi di meccanica e nello studio dei circuiti elettrici.

Quesito interdisciplinare n. 1

Data la funzione

$$f(r) = \begin{cases} ar^2 + b & 0 \leq r < R \\ -\frac{k}{r} & r > R \end{cases}$$

con a, b, k parametri reali; si determini dapprima la relazione tra i parametri in modo che f sia di classe $C^1([0, +\infty[)$. Posto poi $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e supposto che $\varphi(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ rappresenti un potenziale gravitazionale, si determini il campo gravitazionale, la funzione densità di materia $\rho(r)$ e la massa M della distribuzione.

Quesito interdisciplinare n. 2

Un liquido incompressibile riempie un recipiente cilindrico avente raggio di base R ed altezza h , fino ad un'altezza $h_0 < h$. Successivamente esso viene

messo in rotazione attorno all'asse di simmetria del recipiente con velocità angolare ω costante. Si dimostri che per $\omega \leq \frac{2}{R}\sqrt{gH}$ con $H = \min\{h_0, h - h_0\}$ la superficie libera assume la forma di un paraboloide di rotazione ed il liquido non si versa al di fuori del recipiente. Si determini l'espressione analitica del paraboloide in termini dei parametri dati.

Quesito di Fisica n. 1

Una sfera non conduttrice di raggio R_2 contiene una cavità sferica concentrica di raggio R_1 ($R_2 > R_1$). Tra R_1 ed R_2 è distribuita uniformemente la carica q . Determinare il potenziale nel centro della sfera.

Quesito di Fisica n. 2

Un cilindro cavo, di raggio di base R , ruota intorno al suo asse verticale di simmetria con una velocità angolare ω costante. Un corpo di massa m , poggiato contro la parete interna del cilindro ruota insieme ad esso ma non cade. Se il coefficiente di attrito statico tra il corpo e la parete del cilindro è μ_s calcolare il valore minimo che deve avere ω .

Quesito di Matematica n. 1

Siano r ed s due semirette aventi origine comune O e si supponga che formino un angolo di 45° . Si prendano poi due punti $A \in r$, $B \in s$, variabili su tali rette e tali che $\overline{OA} = \overline{OB}^2$. Determinare il luogo dei punti C del piano nel quale giacciono r ed s tali che $\overline{OC} = \overline{AC} = \overline{BC}$.

Quesito di Matematica n. 2

Trovare, se ne esistono, funzioni continue $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ tali che

$$[f(x)]^2 = \int_0^x [f(t)]^2 \frac{\sin t}{2 - \cos t} dt + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$