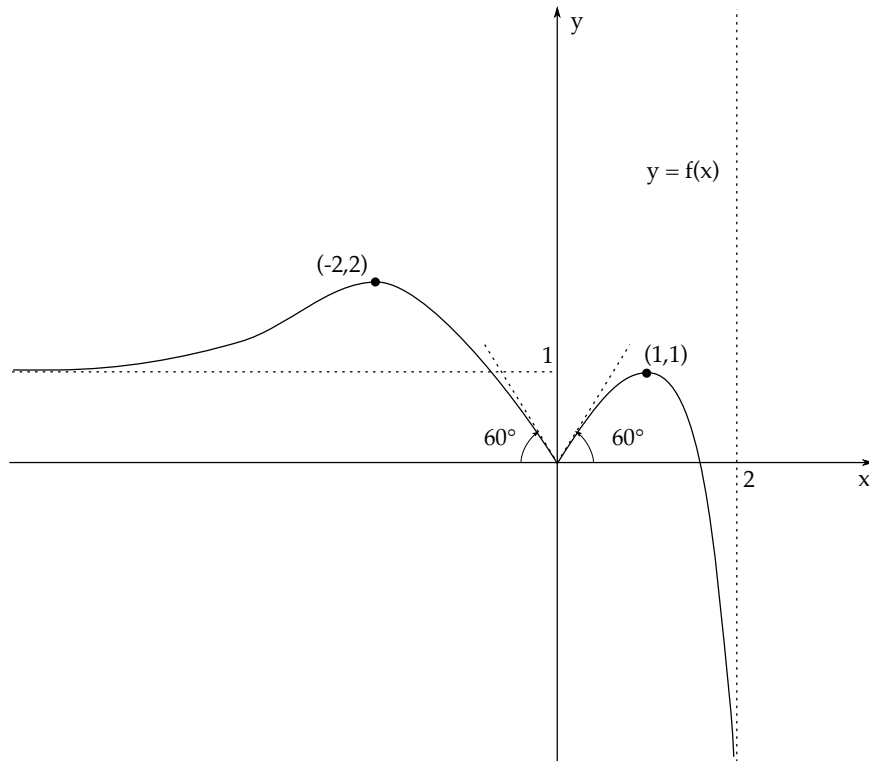


Esercizio 1

Sapendo che la funzione $f : (-\infty, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ ha il seguente grafico:



disegnare un grafico plausibile di ciascuna delle seguenti funzioni, illustrando sinteticamente il ragionamento seguito:

- $g_1(x) = f(2 + x)$;
- $g_2(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$;
- $g_3(x) = \frac{1}{f(x)}$;
- $g_4(x) = f'(x)$;
- $g_5(x) = \int_0^x f(t) dt$ (anche per x negativo).

Esercizio 2

- a) Si approssimi un satellite per telecomunicazioni con un corpo in moto circolare uniforme attorno al centro della Terra, quest'ultimo considerato fermo. Discutere quali forze agiscono sul satellite nel sistema di riferimento (S.R.) solidale con il satellite stesso, specificando quale è reale e quale fittizia.
- b) Descrivere, in un S.R. inerziale, il moto del satellite di cui al punto a) elencando le forze che agiscono su di esso e specificando quale è reale e quale fittizia.
- c) Perché un satellite sia visto sempre nella stessa direzione dalle parabole riceventi poste sulla Terra, il suo moto circolare deve avere lo stesso periodo della rotazione terrestre (orbita geostazionaria). Approssimando la Terra con una sfera di raggio $R=6300$ km che ruota attorno ad un asse fisso con il periodo (T) di un giorno e considerando un satellite che ruota sul piano equatoriale, esprimere la distanza D dalla superficie terrestre alla quale deve ruotare il satellite per essere sull'orbita geostazionaria in termini di R, T e dell'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre (g).
- d) Descrivere brevemente (poche righe) un esempio in cui, come il caso descritto in questo esercizio, agiscano su di un corpo almeno una forza fittizia e almeno una reale, ma in cui il S.R. sia in moto rettilineo non uniforme.

Esercizio 3

- i. Si consideri un cono circolare retto a una falda, di vertice C e un piano π . In quali casi la loro intersezione è un'ellisse?
- ii. L'ellisse è (anche) il luogo dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante; si indichi questa costante con 2ℓ . Considerando un'ellisse di semiassi a, b , con $a > b$, si indichi con r la distanza dei fuochi dal centro, e con e l'eccentricità, cioè il rapporto tra r e a . Esprimere b e 2ℓ in funzione di a ed e .
- iii. Tra le proprietà delle ellissi, ce n'è una che ha interessanti applicazioni: in una stanza di forma ellittica, posizionandosi in uno dei fuochi, è possibile ascoltare una conversazione che avvenga nei pressi dell'altro fuoco, anche a basso volume. La stessa proprietà vale per raggi luminosi, nel caso di pareti riflettenti: raggi luminosi che si originano in un fuoco si concentrano nell'altro.

Illustrare qual è la legge fisica che governa la riflessione dei raggi luminosi, ed enunciare quale proprietà geometrica dell'ellisse permetta il verificarsi della concentrazione dei raggi da un fuoco all'altro (ci si limiti al caso bidimensionale).
- iv. Si consideri un corpo in orbita kepleriana ellittica, intorno a un astro attrattore, considerato fisso. Il punto dell'orbita più lontano dall'astro attrattore si chiama **apoastro**, il più vicino si chiama **periastro**. Come è diretta la velocità del corpo mentre passa per il periastro e l'apoastro? In quale dei due casi è maggiore? Si determini il rapporto tra le due velocità in funzione dell'eccentricità dell'orbita.

ESERCIZIO 4

Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa m sotto l'azione di una forza costante che agisce nella direzione del moto. Si indichi con x l'ascissa che determina la posizione del punto materiale in un opportuno sistema di riferimento Ox fissato sulla retta lungo la quale avviene il moto, con F la componente della forza lungo l'asse x , con v_0 la velocità del punto ad un certo istante iniziale e con x_0 la sua posizione iniziale.

1. Si caratterizzi cinematicamente il moto considerato e si scrivano le leggi orarie della velocità v e dell'ascissa x del punto materiale in funzione del tempo t .
2. Si enunci il teorema che stabilisce il legame tra il lavoro della forza e la variazione di energia cinetica del punto materiale (teorema dell'energia cinetica) e si mostri, senza fare uso del calcolo integrale, che il teorema è verificato nel caso del moto considerato.
3. Si consideri il caso in cui il punto materiale si muove lungo una guida rettilinea orizzontale rigida, il cui coefficiente di attrito dinamico è μ_d , senza che nella direzione del moto agiscano forze diverse da quella d'attrito. Utilizzando i risultati precedenti, si determini lo spazio percorso ℓ fino all'arresto completo in funzione della velocità iniziale v_0 .
4. Utilizzando il calcolo integrale, si dimostri il teorema dell'energia cinetica, nel caso del moto unidimensionale di un punto materiale di massa m in un campo di forze $F(x)$ non uniforme.

esercizio 5

Una semicirconferenza ha centro O e diametro AB di lunghezza 2. Un trapezio $ABCD$ è inscritto nella semicirconferenza.

- a) Sapendo che un angolo del trapezio è di 70° , determinare l'ampiezza degli angoli formati dalle diagonali del trapezio.
- b) Dimostrare che, in generale, l'angolo BOC è uguale all'angolo acuto formato dalle due diagonali del trapezio.
- c) Dimostrare che, detto β l'angolo BOC , l'area del trapezio si può esprimere nella forma
 $\text{sen } \beta (1 + \cos \beta)$.
- d) Facendo riferimento alla formula precedente oppure usando un altro metodo, determinare il trapezio di area massima fra tutti i trapezi inscritti nel semicerchio.